解説論文　ベルヌーイ数の多重化とその組合せ論的応用

解説論文

ベルヌーイ数の多重化とその組合せ論的応用

Poly-Bernoulli numbers and their combinatorial applications

佐々木 義卓*
Yoshitaka SASAKI

Abstract: The poly-Bernoulli number is a generalization of the classical Bernoulli number. In this paper, certain recursion formulas for the numbers are discussed. Further, a combinatorial interpretation of such a formula is provided. This paper is a survey of the author's recent paper [8].

Keywords: Bernoulli numbers, Poly-Bernoulli numbers, Lonesum matrices

1 はじめに

数列 $a_0, a_1, \ldots$ に対し, それを展開係数に持つ関数

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$$

を数列 $a_0, a_1, \ldots$ の (指数型) 母関数と言う. 例えば, 指数関数 e^{2t} は公比 2 の等比数列 $1, 2, 2^2, \ldots$ の母関数である:

$$e^{2t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} t^n.$$

数列の一般項を定めることと, その母関数を定めることは等価であるため, 本稿では母関数で数列を定義する. 本稿の主題である多重ベルヌーイ数 (ポリベルヌーイ数) は, 母関数

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \tag{1}$$

で定義されるベルヌーイ数 B_n を, 多重対数関数 (ポリログ)を用いて拡張したものである (金子 [6]). この多重ベルヌーイ数は, 近年活発に研究されている多重ゼータ値と呼ばれる多重級数の研究だけでなく, 符号理論に応用があるロンサム行列など, 様々な分野と関係することが知られている. 本稿の目的は, 筆者等の最近の研究 [8] で得られた多重ベルヌーイ数が満たす帰納的関係式とその組合せ論的応用について概説することである. まず, 第 2 節において古典的なベルヌーイ数の性質について述べ, 第 3 節で本稿の主定理の一つである多重ベルヌーイ数の帰納的関係式 (定理 3.4) を示す. さらにその関係式がロンサム行列の数え上げ公式として理解できることを第 4 節で述べる.

*東北学院大学

2 古典的ベルヌーイ数

本節では古典的ベルヌーイ数の基本的性質について簡潔に述べる. 詳細は [1] などを参照されたい. 母関数 (1) で定義されるベルヌーイ数 B_n は次の等式を満たすことが知られており, これを用いることで逐次的に計算することができる:

定理 2.1. 非負整数 n に対して,

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n+1}{m} B_m = n + 1. \tag{2}$$

ただし, $\binom{n}{m} = n!/(m!(n-m)!) = {}_nC_m$.

まず, この等式を用いてベルヌーイ数 B_n を具体的に計算してみる. 上式 (2) が $n = 0$ のとき,

$$B_0 = 1 \tag{3}$$

を得る. 次に $n = 1$ のときの (2) を計算すると, $B_0 + 2B_1 = 2$ であり, これに $B_0 = 1$ を代入することで

$$B_1 = \frac{1}{2} \tag{4}$$

を得る. 同様に $n = 2$ のときは $B_0 + 3B_1 + 3B_2 = 3$ であり, (3), (4) を代入することで,

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

がわかる．以下同様の操作で逐次的に B_n を計算すること可能であり, それをまとめたものが表1である． この数表から B_n は有理数であることと, $B_{2m+1} = 0$ $(m = 1, 2, \dots)$ であることが観察されるが, それらは次のように証明される．定理 2.1を次の形に書き換える:

$$B_n = 1 - \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n+1}{m}B_m$$

右辺の $\binom{n}{m}$ は整数であるから, ベルヌーイ数 B_m $(m = 0, \dots, n-1)$ が有理数ならば, 帰納的に B_n も有理数であることが示される．また,

$$b(t) = \frac{te^t}{e^t - 1} - \frac{1}{2}t = \frac{t(e^t+1)}{2(e^t-1)} = \frac{t}{2}\cot\frac{t}{2} \tag{5}$$

とおくと, (1) および $B_1 = 1/2$ より,

$$\begin{aligned} b(t) &= B_0 + \frac{B_2}{2!}t^2 + \frac{B_3}{3!}t^3 + \frac{B_4}{4!}t^4 + \cdots, \\ b(-t) &= B_0 + \frac{B_2}{2!}t^2 - \frac{B_3}{3!}t^3 + \frac{B_4}{4!}t^4 - \cdots \end{aligned}$$

である．式 (5) より $b(t) = b(-t)$ が成り立つので, 上式の奇数次の係数を比較することで $B_{2m+1} = -B_{2m+1}$ が得られ, $B_{2m+1} = 0$ $(m = 1, 2, \dots)$ が示される．

表 1: ベルヌーイ数 B_n

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0

n	10	11	12	13	14	15	16
B_n	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	0	$\frac{7}{6}$	0	$-\frac{3617}{510}$

本節の終わりに, ベルヌーイ数の応用について述べる．ベルヌーイ数 B_n はヤコブ・ベルヌーイが自然数のべき乗の和の研究において扱ったものであり ([1] 参照), B_n を深く理解することは, べき乗和の効果的な計算に繋がっている．一般的な自然数のべき乗の和の公式は, ベルヌーイ数を用いると次のように述べられる:

定理 2.2 (べき乗和の公式)**.** 自然数 k, n に対して,

$$\begin{aligned} &1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}B_j n^{k+1-j}. \end{aligned}$$

上定理は, 一般に1から n までの k 乗の和が, ベルヌーイ数を係数とする n に関する $k+1$ 次の多項式として表されることを述べている．以下の例では, 定理 2.2から, 高校数学で学習するべき乗和の公式が実際に得られることを確認することができる．

例 2.3.　(i) $k = 1$ のとき:

$$\frac{1}{2}\left\{B_0n^2 + 2B_1n\right\} = \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(ii) $k = 2$ のとき:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}\left\{B_0n^3 + 3B_1n^2 + 3B_2n\right\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right\} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

(iii) $k = 3$ のとき:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\left\{B_0n^4 + 4B_1n^3 + 6B_2n^2\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{n^4 + 2n^2 + n^2\right\} \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

3　多重ベルヌーイ数

多重ベルヌーイ数を導入するために, まずは多重対数関数 (ポリログ) の性質について述べる．整数 k に対して, 多重対数関数は

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}_k(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^k} \\ &= x + \frac{x^2}{2^k} + \frac{x^3}{3^k} + \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

$(|x| < 1)$ で定義される．対数関数のテイラー展開

$$-\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

に注意すれば, $\mathrm{Li}_1(x) = -\log(1-x)$ であり, 多重対数関数が対数関数を拡張したものであることがわかる．また, (6) の右辺を項別に微分することにより,

$$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Li}_k(x) = \frac{\mathrm{Li}_{k-1}(x)}{x}$$

が得られるため, $\mathrm{Li}_k(x)$ は対数関数 $-\log(1-x) = \mathrm{Li}_1(x)$ を逐次的に微分・積分して導入される関数

とも言える．この多重対数関数を用いてベルヌーイ数を拡張したものが, 母関数

$$\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n^{(k)}}{n!} t^n, \tag{7}$$

で定義される多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)}$ である (金子 [6])． 実際, $k = 1$ のときは $\mathrm{Li}_1(1-e^{-t}) = -\log(1-(1-e^{-t})) = t$ より, (7) は (1) と等しくなり,

$$B_n = B_n^{(1)}$$

がわかる．多重ベルヌーイ数の具体的な数値データを表2にまとめる．この表より, 多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)}$ は n を固定しても k を変化させるごとに異なる値を取ることが確認できる．2 次元の広がりを持ったこの数列の意義, とりわけ組合せ論的応用を第4節で述べる．

表 2: 多重ベルヌーイ数 $B_n^{(k)}$

$k\backslash n$	0	1	2	3	4	5
4	1	$\frac{1}{16}$	$-\frac{49}{1296}$	$\frac{41}{3456}$	$\frac{26291}{3240000}$	$-\frac{1921}{144000}$
3	1	$\frac{1}{8}$	$-\frac{11}{216}$	$-\frac{1}{288}$	$\frac{1243}{54000}$	$-\frac{49}{7200}$
2	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{7}{450}$	$\frac{1}{40}$
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0
0	1	1	1	1	1	1
-1	1	2	4	8	16	32
-2	1	4	14	46	146	454
-3	1	8	46	230	1066	4718
-4	1	16	146	1066	6902	41506

古典的ベルヌーイ数と同様に, 多重ベルヌーイ数も逐次的に計算することが可能である:

定理 3.1 (金子 [7, 1])**.** 整数 k と非負整数 n に対して,

$$B_n^{(k)} = \frac{1}{n+1}\left\{B_n^{(k-1)} - \sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m-1}B_m^{(k)}\right\} \tag{8}$$

例として, 定理3.1を用いて $B_n^{(0)}$ および $B_n^{(2)}$ を具体的に計算する．漸化式 (8) より,

$$B_n^{(0)} = (n+1)B_n + \sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m-1}B_m \tag{9}$$

および

$$B_n^{(2)} = \frac{1}{n+1}\Big\{B_n - \sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m-1}B_m^{(2)}\Big\} \tag{10}$$

であり, 古典的ベルヌーイ数 B_n および $B_0^{(k)} = 1$ (k は任意の整数) を初期値として与えると, $n = 0$ から順に,

$$\begin{aligned} B_0^{(0)} &= B_0 + 0 = 1, \\ B_1^{(0)} &= 2B_1 + 0 = 1, \\ B_2^{(0)} &= 3B_2 + B_1 = \frac{3}{6} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} B_0^{(2)} &= B_0 - 0 = 1, \\ B_1^{(2)} &= \frac{1}{2}\Big\{B_1 - 0\Big\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\ B_2^{(2)} &= \frac{1}{3}\Big\{B_2 - B_1^{(2)}\Big\} = \frac{1}{3}\cdot\Big(-\frac{1}{12}\Big) = -\frac{1}{36} \end{aligned}$$

($n = 0$ および 1 のときは, 右辺の和 (空和) は 0 として扱う) が得られる．

このように多重ベルヌーイ数が帰納的に計算されるわけだが, 古典的ベルヌーイ数の定理2.1と比較すると, 定理3.1は $B_n^{(k)}$ の計算に $B_n^{(k-1)}$ が必要であり, 上付きのパラメータが同一の k で閉じていないという違いがある． このことに関しては, [1] において「上付きパラメータが同一な多重ベルヌーイ数の漸化式をつくれるかはわかっていない」ことが注意されており, 本稿の主定理は, この問題に対して解答を与えるものである．

3.1 スターリング数

主定理を述べるためには, スターリング数を導入する必要がある．スターリング数は第 1 種と第 2 種があり, さらにはそれらを拡張した r-スターリング数もある．ここでは主定理で用いられる第 1 種 r-スターリング数についてまとめる．

まず, 第 1 種スターリング数 $\left[{n \atop m}\right]$ は, 正整数 n, m に対して,

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = m \text{ 個のサイクルからなる } n \text{ 次置換の個数}$$

で定義されるが, 本稿では以下の母関数で定義することにする:

$$(t)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} t^m,$$

$$\frac{(-\log(1-t))^m}{m!} = \sum_{n=m}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}\frac{t^n}{n!}.$$

ここで,

$$(t)^{(n)} = \begin{cases} t(t+1)\ldots(t+n-1) & n \geqq 1, \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

である.

注意 3.2. 符号を付けた $(-1)^{n-m}\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ を第1種スターリング数と呼ぶ場合もある．例えば, 数式処理システム Mathematica に実装されている関数 “StirlingS1” は, 符号付きの第1種スターリング数の値を返すので, 計算機による数値計算を行う時は注意が必要である.

第1種 r-スターリング数は, 同種の組合せ論的観点から導入されるものであるが (Broder [5]), 本稿では以下の母関数で定義する:

$$(t+r)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r t^m,$$
$$\frac{(-\log(1-t))^m}{(1-t)^r m!} = \sum_{n=m}^{\infty} \begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r \frac{t^n}{n!}.$$

表3, 4, 5からわかるように, r-スターリング数は以下の性質を満たす:

命題 3.3. 非負整数 n, m, r に対して,

$$\begin{bmatrix} n+r \\ m+r \end{bmatrix}_r = 0 \qquad (m > n),$$
$$\begin{bmatrix} n+r \\ n+r \end{bmatrix}_r = 1,$$
$$\begin{bmatrix} n+r \\ r \end{bmatrix}_r = \frac{(r+n-1)!}{(r-1)!},$$
$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}.$$

表 3: スターリング数 $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}(=\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_0)$

$n\backslash m$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0	0
4	0	6	11	6	1	0	0
5	0	24	50	35	10	1	0
6	0	120	274	225	85	15	1

表 4: 1-スターリング数 $\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix}_1$

$n\backslash m$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
2	2	3	1	0	0	0	0
3	6	11	6	1	0	0	0
4	24	50	35	10	1	0	0
5	120	274	225	85	15	1	0
6	720	1764	1624	735	175	21	1

表 5: 2-スターリング数 $\begin{bmatrix} n+2 \\ m+2 \end{bmatrix}_2$

$n\backslash m$	0	1	2	3	4	5	6
0	1	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0
2	6	5	1	0	0	0	0
3	24	26	9	1	0	0	0
4	120	154	71	14	1	0	0
5	720	1044	580	155	20	1	0
6	5040	8028	5104	1665	295	27	1

3.2　主定理

本稿の主定理を述べる.

定理 3.4 (零化公式, 大野・佐々木 [8])**.** 任意の非負整数 n および正整数 k, m ($k \leqq m$) に対して,

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \begin{bmatrix} m+2 \\ j+2 \end{bmatrix}_2 B_{n+j}^{(-k)} = 0. \tag{11}$$

この等式の注目すべき二つの特徴を述べる．一つ目はパラメータ n を任意の非負整数として取れる点である．つまり (11) は, 連続した $m+1$ 個の多重ベルヌーイ数

$$B_n^{(-k)},\ B_{n+1}^{(-k)},\ \ldots,\ B_{n+m}^{(-k)}$$

(n は任意の非負整数, $m \geqq k$) に重み (2-スターリング数) $(-1)^{m-j}\begin{bmatrix} m+2 \\ j+2 \end{bmatrix}_2$ を掛けて足し合わせると必ずゼロになることを述べている．これが (11) を零化公式と呼ぶ理由である.

また, 零化公式 (11) の係数部を

$$s_j^{(m)} = (-1)^{m-j} \begin{bmatrix} m+2 \\ j+2 \end{bmatrix}_2$$

とおき, n を $n-m$ として和の取り方を逆順にすると,

$$\sum_{j=0}^{m} s_{m-j}^{(m)} B_{n-j}^{(-k)} = 0 \tag{12}$$

と表され, さらには次のように上付きパラメータが "$-k$" で固定された多重ベルヌーイ数の漸化式の形に書き換えることができる. これは, 上述した「上付きパラメータが同一の漸化式をつくれるかどうか」に対する解答であり, (11) の二つ目の特徴である:

定理 3.5. 任意の正整数 k, m, n ($k \leqq m \leqq n$) に対して,

$$B_n^{(-k)} = -\Big(s_{m-1}^{(m)} B_{n-1}^{(-k)} + s_{m-2}^{(m)} B_{n-2}^{(-k)} + \cdots + s_0^{(m)} B_{n-m}^{(-k)}\Big). \tag{13}$$

一方で, (11) は上付きパラメータと下付きパラメータを反転させても同様の等式が成り立つ:

定理 3.6 (双対型零化公式, 大野・佐々木 [8])**.** 任意の整数 n および正整数 k, m ($k \leqq m$) に対して,

$$\sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \begin{bmatrix} m+2 \\ j+2 \end{bmatrix}_2 B_k^{(-n-j)} = 0. \tag{14}$$

上定理は上付きと下付きのパラメータの反転だけではなく, n の非負整数という条件が整数全体へと拡充されている点にも注目する必要がある. なぜならば, これにより (14) の左辺には, 上付きパラメータが正と負の多重ベルヌーイ数が共に現れるようになるためである. 表 2からもわかるように, 多重ベルヌーイ数は上付きパラメータが負の場合は全て正の整数であるが, 正の場合は有理数となるため, 性質が著しく異なる. これは, 上付きパラメータが正と負の多重ベルヌーイ数を同じ枠組みで扱うことの難しさを表している. 定理 3.6は, それらを同時に扱っても (14) のような調和の取れた等式が成り立つことを示している.

定理 3.6も次のような漸化式の形に表すことができる:

定理 3.7. 任意の整数 n および正整数 k, m ($k \leqq m$) に対して,

$$B_k^{(n)} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!}\Big(s_1^{(m)} B_k^{(n-1)} + s_2^{(m)} B_k^{(n-2)} + \cdots + s_m^{(m)} B_k^{(n-m)}\Big). \tag{15}$$

多重ベルヌーイ数 $B_k^{(n)}$ が, 低次の多重ベルヌーイ数 $B_k^{(n-1)}, \ldots, B_k^{(n-m)}$ から計算されることがわかる. 特に上付きパラメータが非正整数の多重ベルヌーイ数は整数であることに着目すると (表 2参照), (15) は, 有理数の古典的ベルヌーイ数が整数の枠組みで計算できることを意味している.

以下では, 具体例を通じて, これらの定理の性質を概観する.

例 3.8. 定理 3.5, 3.7の $k = 2, 3$ の場合を, $k = m$ として具体的に計算する. 表 5を用いることで, (13) は

$$B_n^{(-2)} = 5B_{n-1}^{(-2)} - 6B_{n-2}^{(-2)},$$
$$B_n^{(-3)} = 9B_{n-1}^{(-3)} - 26B_{n-2}^{(-3)} + 24B_{n-3}^{(-3)}.$$

右辺の多重ベルヌーイ数に具体的な数値を代入してみると, 表 2より,

$$5 \cdot 4 - 6 \cdot 1 = 14 \ = B_2^{(-2)},$$
$$5 \cdot 14 - 6 \cdot 4 = 46 \ = B_3^{(-2)},$$
$$5 \cdot 46 - 6 \cdot 14 = 146 = B_4^{(-2)}$$

および

$$9 \cdot 46 - 26 \cdot 8 + 24 \cdot 1 = 230 \ = B_3^{(-3)},$$
$$9 \cdot 230 - 26 \cdot 46 + 24 \cdot 8 = 1066 = B_4^{(-3)}$$

となって, 零化公式が正しいことがわかる. 一方で (15) は,

$$B_2^{(n)} = \frac{1}{6}\left(5B_2^{(n-1)} - B_2^{(n-2)}\right),$$
$$B_3^{(n)} = \frac{-1}{24}\left(26B_3^{(n-1)} - 9B_3^{(n-2)} + B_3^{(n-3)}\right).$$

右辺を $n = 1$ として計算してみると, 表 2より,

$$\frac{1}{6}(5 \cdot 1 - 1 \cdot 4) = \frac{1}{6} = B_2,$$
$$-\frac{1}{24}(26 \cdot 1 - 9 \cdot 8 + 46) = 0 \ = B_3$$

となって, 古典的ベルヌーイ数が本質的に整数の範囲で計算できたことがわかる.

4　多重ベルヌーイ数とロンサム行列

多重ベルヌーイ数は整数論だけでなく, 組合せ論的にも重要な意味を持つことが知られている. これまでに, 多重ベルヌーイ数と関係する組合せ論的モデルが多数解明されているが (例えば [3] 参照), ここではロンサム行列との関係に着目することで, 零化公式の組合せ論的意味について論ずる.

定義 4.1 (ロンサム行列)**.** 成分が 0 もしくは 1 の行列 A が, その行和と列和から一意的に再構成可能なとき, A をロンサム（lonesum）行列という.

例 4.2. サイズ 2×3 のロンサム行列の例を挙げる. 行和・列和を行列の枠外に書くことにする. 次の行列は, 行和・列和から一意的に決定される:

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

実際に, 1 列目と 3 列目の列和から第 1 列と第 3 列が決定され, 第 2 列は残りの列和・行和から決定される. したがって, この行列はロンサムである. 一方で, 次の 2 つの行列は同じ行和と列和を持つため, 行和・列和から一意的に再構成することはできない. したがって, ロンサムではない:

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \begin{array}{c c} & \begin{matrix} 1 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

サイズ 2×3 で成分が 0 または 1 の行列は全部で $2^6 = 64$ あるが, そのうちロンサムな行列は 46 存在する.

一般に, サイズ $k \times n$ で成分が 0 または 1 の行列は 2^{km} あり, そのうち, ロンサムな行列の集合を $\mathcal{L}(k,n)$, その個数を $\#$ を付けて $\#\mathcal{L}(k,n)$ で表すとする. さらに, 非負整数 k,n に対して,

$$L(k,n) = \begin{cases} 1 & k = 0 \text{ または } n = 0, \\ \#\mathcal{L}(k,n) & \text{その他.} \end{cases}$$

とするとき, ロンサム行列と多重ベルヌーイ数の間には次のような関係がある:

定理 4.3 (Brewbaker [2])**.** 非負整数 k,n に対して,

$$L(k,n) = B_n^{(-k)}. \tag{16}$$

多重ベルヌーイ数の零化公式とロンサム行列との関係を述べるために, 次のような集合を導入する. 正整数 k,n および非負整数 m $(0 \leqq m \leqq n)$ に対して,

$$\mathcal{B}(k,n;m) = \left\{ A \in \mathcal{L}(k,n) \;\middle|\; \begin{matrix} A[1],\ldots,A[m] \neq \vec{0},\vec{1} \\ A[1],\ldots,A[m] \text{ は相異なる} \end{matrix} \right\}$$

とおく. ここで, $A[j]$ は行列 A の第 j 列の k 次列ベクトルを表し, $\vec{0}$, $\vec{1}$ はそれぞれ成分が全て 0, 1 の k 次列ベクトルを表している. 特に $\mathcal{B}(k,n;0) = \mathcal{L}(k,n)$ である. このとき, 次が成り立つ:

定理 4.4 (大野・佐々木 [8])**.** 非負整数 n, k, m $(1 \leqq k \leqq n,\ 0 \leqq m \leqq n)$ に対して,

$$\#\mathcal{B}(k,n;m) = \sum_{j=0}^{m} s_{m-j}^{(m)} L(k,n-j).$$

定理 4.3を踏まえると, 上定理の右辺は, 定理 3.4を書き換えた (12) の左辺と等しいことに注意されたい. さらに, 次が成り立つ:

定理 4.5 (**零化公式**, 大野・佐々木 [8])**.** 正整数 k,n,m $(k \leqq m \leqq n)$ に対して,

$$\#\mathcal{B}(k,n;m) = 0.$$

すなわち,

$$\sum_{j=0}^{m} s_{m-j}^{(m)} L(k,n-j) = 0.$$

定理 4.5および (16) より, 零化公式 (12) は, ある条件付きのロンサム行列の個数がパラメータ m によって枯渇していく様子を捉えたものと判断できる. 特に, 定理 3.4では除外されていた $k > m$ の場合の組合せ論的意味に至るまで理解できたと言える. 一方で, 定理 4.5はロンサム行列の個数を与える漸化式としても理解することができる:

系 4.6 (ロンサム行列の数え上げ)**.** 正整数 k,n,m $(k \leqq m \leqq n)$ に対して,

$$L(k,n) = -\sum_{j=1}^{m} s_{m-j}^{(m)} L(k,n-j).$$

5　おわりに

本稿では, 多重ベルヌーイ数の帰納的関係式である零化公式の特性について述べるとともに, ロンサム行列と多重ベルヌーイ数との関係に焦点を当てることで, 零化公式がロンサム行列の数え上げ公式として理解できることを述べた. 一方で, 多重ベルヌーイ数はロンサム行列だけでなく, グラフ理論など様々な分野と関係することが知られていることから, 零化公式も多様な組合せ論的解釈を持つことが考えられる. 最近の Bényi・松坂 [4] の研究では, 多重ベルヌーイ数の和の組合せ論的モデルが多数解明されるとともに, 零化公式と同値な等式も得られており, 今後の零化公式の研究発展が期待される.

参考文献

[1] T. Arakawa, T. Ibukiyama, M. Kaneko: "Bernoulli numbers and zeta functions", Springer, Tokyo, (2014).

[2] C. Brewbaker: "A combinatorial interpretation of the poly-Bernoulli numbers and two Fermat analogues", Integers, Vol. 8 (2008), article No. A2, 9pp.

[3] B. Bényi, P. Hajnal, "Combinatorics of poly-bernoulli numbers", Stud. Sci. Math. Hung. Vol. 52 (2015), 537/558.

[4] B. Bényi, T. Matsusaka: "On the combinatorics of symmetrized poly-Bernoulli numbers", arXiv:2007.13636.

[5] A. Broder: "The r-Stirling numbers", Disc. Math., Vol. 49 (1984), 241/259.

[6] M. Kaneko: "Poly-Bernoulli numbers", J. Th. Nombre Bordeaux, Vol. 9 (1997), 199/206.

[7] M. Kaneko: "Multiple Zeta Values and Poly-Bernoulli Numbers", Tokyo Metropolitan University Seminar Report, (1997).

[8] Y. Ohno, Y. Sasaki: "Recursion formulas for poly-Bernoulli numbers and their applications", Int. J. Number Theory, accepted. doi:10.1142/S1793042121500081